小学校の算数からオイラー公式へ！！　～最も美しい数式～

① $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$　「うん！これは2を３コかけるんだから、答えは8だね」　2^nは2をnコかけるんだ！！（nは自然数）　このnのことを指数というんだ！！

② $2^0 = 1$　「えー！２を０コかけるんだから、答えは０じゃないのー？」「いや違うなー。ここで発想を変えて、$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$　でｍ＝ｎのときは、$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0 = 1$となるネ！」
だって分母と分子が同じ値なんだもん！

③ $2^{-1} = \frac{1}{2}$　「２を－１コかけるの！？意味わかんない。」「$2^0 = 1$が定義されたら、$\frac{2^0}{2^n} = 2^{0-n} = 2^{-n} = \frac{1}{2^n}$になるヨ！！」すなわち、$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$のｍ、ｎは任意の整数まで拡張した

④ $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 1.41421356\ldots$　「$2^1 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2$ より $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$　$(a^m)^n = a^{mn}$をｍ、ｎが有理数まで拡張したんだ。」

⑤ $2^{\pi} = 8.8249\ldots$　$2^{\sqrt{2}}$ これは厳密には高校ではやらないのですが　「ｙ＝2^xが連続関数であると考えて、　$2^{1.4} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1.5} \rightarrow 2^{1.41} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1.42} \rightarrow$　・・・として、封じ込めていく！！

⑥ $e^{\pi} = 23.14062\ldots$　π＝３．１４１５９２…　←円周率π、半径１の円の面積：π　　e＝２．７１８２８…　←自然対数の底（ネピアの数）　$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

ｙ＝a^xのｘ＝０における微分係数が１になるときのaの値がｅである　　指数の実数への拡張なんだ！！

⑦ $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$，$(-\infty < x < \infty)$　平均値の定理「$f(x) = f(a) + (x-a) \times f'(c)$が$(a < c < x)$にｃが存在する。」を発展させたものがテーラー展開で、
高校ではやりません。

⑧ $e^{i\theta} = 1 + \frac{(i\theta)^0}{0!} + \frac{(i\theta)^1}{1!} + \cdots$　「なんで微分なんてやるの??」「うーん!素朴で根本的な質問ですね!それは、微分→細分けその厳密性の練磨が、世の中を説得する何千年もの数学の歴史であり、その思想が現代の我々の文明をささえていると言っても過言ではないのだ！」

⑨ $\sin\theta = \frac{\theta^1}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots$

⑩ $\cos\theta = \frac{\theta^0}{0!} - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots$

テーラー展開により sin θ, cos θをべき級数で表したもの

$i^2 = -1$　「虚数単位ｉを考えることに何の意味があるの？？」　「それは、実数から複素数への数の拡張を行うことによって、高校では学びませんが
Cardanoの公式（3次方程式の解の公式）
L,Ferrari の公式（4次方程式の解の公式）
等を複素数を用いて一般解を求めることができるんだ。」（５次方程式以上は一般解が存在しないことは証明されている（ガロアの群論によって）

⑪ $e^{i\theta} = \left(\frac{\theta^0}{0!} - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(\frac{\theta^1}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right) = \cos\theta + i\sin\theta$

⑪がオイラーの公式です！！

⑫ $e^{i\pi} = -1$　⑧の式にθ＝πを代入すると、$\cos\theta = \cos\pi = -1, \sin\theta = \sin\pi = 0$より $e^{i\pi} = -1$ になる。　何という美しい式だ！
心は既にアンドロメダ星雲の彼方へと無限の広がりをもち、夢は宇宙を駆け巡る!!